8/10/2020

Εύδοξος : Ακρίβης, Αλικάκος, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Partial Differential Equations, Lawrence Evans (σε pdf) (ύλη κεφ 1, 2, 3.2)

1) Τι είναι μια ΜΔΕ κ τάξης;

Είναι μια εξίσωση για μια άγνωστη συνάρτηση $u: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, και κάποιες από τις μερικές παραγώγους της.

2) Συμβολισμός: Για u όπως στο 1) και πολυδείκτη $a \in \mathbb{N}_0^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, τάξης $|a| = a_1 + \dots + a_n$, ορίζουμε $D^a = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}$

3) Γενική μορφή (ουσιαστικά αχρείαστη) ΜΔΕ:

(1) $F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), \underbrace{u(x)}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{x}_{\in U}) = 0$, $x \in U$.

όπου $k \in \mathbb{N}_0$

$D^k u := \{ D^a u : \overbrace{|a|}^{= a_1 + \dots + a_n \, (a_i \in \mathbb{N}_0)} = k \}$ (όλες οι μερικές παράγωγοι της u τάξης k)

Ειδικότερα: $\underset{(\text{η ίδια η } u)}{D^0 u = u}$, $D^1 u = (\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}}_{= \partial x_1} u, \frac{\partial}{\partial x_2} u, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} u)$ (η κλίση της u).

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \partial x_1^2 & \dots & \partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial x_n \partial x_1 & & \partial x_n^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

(ο Εσσιανός)

$u: U \to \mathbb{R}$

Εδώ: $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \underbrace{\mathbb{R}^{n^2}}_{=\mathbb{R}^{n\times n}} \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$

είναι γνωστή συνάρτηση (συνήθως αλγεβρική) και $u : U \to \mathbb{R}$ είναι η ζητούμενη πραγματική άγνωστη συνάρτηση η λύση της (1), η οποία στην καλύτερη περίπτωση θα θέλαμε να είναι κλασική λύση, δηλ. $u \in C^k(U)$ [δηλ. όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι και την τάξη k της ΜΔΕ (1) να είναι συνεχείς]

Σημείωση: Πολλές ΜΔΕ (οι περισσότερες, αν όχι όλες) προκύπτουν από κάποια συγκεκριμένα προβλήματα τα οποία περιγράφουν ένα υπαρκτό φαινόμενο, δηλαδή το μοντελοποιούν [= το μεταφράζουν σε Μαθηματικά]. Αυτά τα φαινόμενα μπορεί να είναι π.χ. ασυνεχή, δηλ. η λύση u της ΜΔΕ η οποία περιγράφει το υπαρκτό φαινόμενο, είναι μη συνεχής (ασυνεχής) ($\Rightarrow$ δεν είναι κλασική λύση)

(απλούστερο παράδειγμα: Εξίσωση Burgers:

$$\underbrace{u_t}_{=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)}(x,t) + u(x,t)\underbrace{u_x(x,t)}_{:=\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)} = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}$$

κλασική λύση (αν-και-όσο-υπάρχει) $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Η εξίσωση περιγράφει ωστικά κύματα (shock waves): π.χ. υπερηχητικό αεροπλάνο που «σπάει τον ήχο»).

Συνεπώς, για να δώσουμε απάντηση σε τέτοια υπαρκτά προβλήματα θα πρέπει να επιτρέψουμε πολλές φορές και μη κλασικές, (γενικευμένες ή) ασθενείς λύσεις (π.χ. ασυνεχείς), οι οποίες όμως θα είναι καλά ορισμένες και θα εξηγούσαν το πρόβλημα ($\Rightarrow$ το πρόβλημα καθορίζει την θεωρία που αναπτύσσουμε για να το απαντήσουμε)

4) Πρώτη ταξινόμηση ΜΔΕ: ως προς τη (μη-) γραμμικότητα: (i) Η ΜΔΕ (1) λέγεται γραμμική (linear) αν είναι της μορφής $\sum_{|a|\leq k} a_a(x) D^a u(x) = f(x)$,

για γνωστούς συντελεστές $a_a : U \to \mathbb{R}$ και $f : U \to \mathbb{R}$ [$f \equiv 0$ ομογενής.]

(ii) Η ΜΔΕ (1) λέγεται ημιγραμμική (semi-linear) αν έχει την μορφή $\sum_{|a|=k} a_a(x) D^a u(x) + a_0(D^{k-1} u(x),$

$\ldots, Du(x), u(x), x) = 0$.

[όχι σχεδόν γραμμική = almost linear]

(iii) Η ΜΔΕ (1) λέγεται οιονεί γραμμική (quasilinear) αν έχει η μορφή

$$\sum_{|a|=k} a_a(D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) D^a u(x) +$$

$$+ a_0(D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0.$$

[Παράδειγμα για $k=1$: $u_t + u \cdot u_x = 0$ (Burgers)].

Η ΜΔΕ (1) λέγεται πλήρως μη γραμμική αν εξαρτάται μη γραμμικά στις παραγώγους ανώτατης τάξης.

5) Παραδείγματα (βλ. και Evans) $u : U \to \mathbb{R}$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό

εξίσωση Laplace :

$\underbrace{\Delta u = 0}$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$

$\Leftrightarrow \Delta u(x) = 0 \Leftrightarrow tr(D^2 u) = 0 \quad =: u_{x_i x_i}$

(κλασική λύση : $u \in C^2(U)$)

(*) $\Leftrightarrow u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n} = 0$
μδε 2ης τάξης γραμμική [έχει μόνο παραγώγους 2ης τάξης και οι συντελεστές του είναι σταθερές $= 1$] (πρότυπο εξ. ελλειπτικού τύπου).

Εξίσωση Poisson: $\Delta u = f$.

β. Εξίσωση μεταφοράς: $u_t(x,t) + b(x,t) \cdot Du(x,t) = 0$ $\quad Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$
όπου $u: U \times (a,b) \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό,
$b: U \to \mathbb{R}^n$ γνωστό (δεδομένο) διανυσματικό πεδίο (= η ταχύτητα της «μεταφοράς»)
μδε 1ης τάξης γραμμική.

Σημείωση Συμβολισμού: όταν έχουμε $u(x,t)$ με $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε $Du(x,t) = (u_{x_1}(x,t), \ldots, u_{x_n}(x,t))$, $t \in \mathbb{R}$.
αντί π.χ. $D_x u(x,t)$ [δηλ. την παράγωγο ως προς τον χρόνο την συμβολίζουμε πάντα ανεξάρτητα]. Το ίδιο και για την Δ:

γ. $u_t - \Delta u = 0$ εξίσωση θερμότητας (δεύτερης τάξης, γραμμική)
(Πρότυπο εξισώσεων παραβολικού τύπου)
δ. $u_{tt} - \Delta u = 0$ εξίσωση κύματος (δεύτερης τάξης, γραμμική)
πρότυπο εξ. υπερβολικού τύπου.
ΜΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΘΑ ΑΣΧΟΛΗΘΟΥΜΕ.
Επιπλέον παραδείγματα:
ε. εξίσωση Schrödinger (βασική εξίσωση της κβαντομηχανικής) $u: U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
$i u_t + \Delta u = 0 \Leftrightarrow i(u^1_t(x,t) + i u^2_t(x,t)) + \Delta(u^1(x,t) + u^2(x,t)) = 0$

στ. $u_t + u \cdot u_x = 0$ εξ. Burgers ($1^{ης}$ τάξης οιονεί γραμμική)

ζ.

$|Du| = 1$ εξίσωση εικόνας.

όπου για $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ Ευκλείδια νόρμα [$= \|x\|$ στο ΑπΙΙ] και $Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ εξίσωση εικόνας $\Leftrightarrow$ $u_{x_1}^2(x) + \ldots + u_{x_n}^2(x) = 1$. $\Leftrightarrow u_{x_1}u_{x_1} + \ldots + u_{x_n}u_{x_n} = 1$

[όχι: $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = 1$]

πρώτης τάξης, πλήρως μη γραμμική

η. εξίσωση Monge–Ampère:

$$\det(D^2 u) = f$$

Εσσιανός

δεύτερης τάξης πλήρως μη γραμμική

[βλ. σε αντιδιαστολή $tr(D^2u) = 0$, εξ. Laplace]

π.χ. για $n = 2$,

$$\det\begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} \end{pmatrix} = u_{x_1x_1} \cdot u_{x_2x_2} - (u_{x_1x_2})^2 = f$$

και $u \in C^2(U)$

θ. εξίσωση ελαχιστικής επιφάνειας:

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{1/2}}\right) = 0$$

απόκλιση

[άσκηση: γράψτε το αναλυτικά για τις μερικές παραγώγους και βρείτε αν είναι γραμμική κτλ.]

ι. εξ. Korteweg–deVries (KdV): $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$